CAPITOLUL I

SERII FOURIER

§1. PRODUS SCALAR

Fie $(\mathbf{X}, +, \mathbf{R}, \cdot)$ un spațiu vectorial real, cu operația internă notată cu „+" și operația cu elemente din corpul $\mathbf{R}$ notată cu „·".

Definiția 1. O funcțională s definită pe $\mathbf{X}\times\mathbf{X}$, cu valori în $\mathbf{R}$ se numește produs scalar, dacă și numai dacă ea este biliniară, simetrică și strict pozitiv definită. Avem deci :

S_1. $s(\alpha x_1+\beta x_2, y)=\alpha s(x_1, y)+\beta s(x_2, y)$, oricare ar fi $\alpha, \beta\in\mathbf{R}$, oricare ar fi $x_1, x_2, y\in\mathbf{X}$

S_2. $s(x, y)=s(y, x)$, oricare ar fi $x, y\in\mathbf{X}$.

S_3. $s(x, x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbf{X}$, $x\neq 0_X$.

Dacă s este o funcțională cu proprietățile S_1, S_2, S_3, atunci are loc inegalitatea

$$(s(x, y))^2\leqslant s(x, x)\cdot s(y, y),\quad \text{oricare ar fi } x, y\in\mathbf{X} \tag{1}$$

care poartă numele de inegalitatea lui Cauchy-Schwartz-Buniakovski.

Într-adevăr, dacă $y\neq 0_X$, funcționala s fiind pozitiv definită, avem :

$s(x+\alpha y, x+\alpha y)\cdot s(y, y)\geqslant 0$, oricare ar fi $\alpha\in\mathbf{R}$, oricare ar fi $x\in\mathbf{X}$.

Folosind proprietățile S_1, S_2, S_3, putem scrie

$s(x, x)\cdot s(y, y)+2\alpha s(x, y)\cdot s(y, y)+\alpha^2(s(y, y))^2\geqslant 0$, oricare ar fi $\alpha\in\mathbf{R}$.

Dacă luăm

$$\alpha=-\frac{s(x, y)}{s(y, y)},\ \text{rezultă}\ s(x, x)\cdot s(y, y)\geqslant (s(x, y))^2,$$

adică inegalitatea (1).

Dacă $y=0_X$, atunci $s(y, y)=0$ și $s(x, 0)=0$.

Prin urmare, inegalitatea (1) este satisfăcută și în acest caz.

§2. SPAŢII HILBERT REALE

Dacă $(\mathbf{X}, +, \mathbf{R}, \cdot)$ este un spaţiu vectorial real, iar s un produs scalar pe $\mathbf{X}$, atunci funcţia $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{R}$;

$$\varphi(x) = \sqrt{s(x, x)}, \quad x \in \mathbf{X},$$

este o normă pe $\mathbf{X}$.

Într-adevăr, notînd $\varphi(x) = \| x \|$, avem :

N_1. $\| x \| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{s(x, x)} = 0 \Leftrightarrow s(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$.

N_2. $\| x+y \| = \sqrt{s(x+y, x+y)} = \sqrt{s(x, x) + s(y, y) + 2s(x, y)} =$

$$= \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2 + 2s(x, y)} \leqslant \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\sqrt{s(x, x)\, s(y, y)}} =$$

$$= \sqrt{\| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\| x \| \cdot \| y \|} = \sqrt{(\| x \| + \| y \|)^2} =$$

$$= \| x \| + \| y \|, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in \mathbf{X}.$$

N_3. $\| \alpha x \| = \sqrt{s(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha^2 \cdot s(x, x)} = | \alpha | \cdot \sqrt{s(x, x)} =$

$$= | \alpha | \cdot \| x \|, \quad \text{oricare ar fi } \alpha \in \mathbf{R}, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbf{X}.$$

Proprietăţile N_1, N_2, N_3 ale normei pe un spaţiu vectorial fiind verificate de funcţia φ, spaţiul $\mathbf{X}$ devine un spaţiu vectorial normat.

Definiţia 2. Se numeşte *spaţiu Hilbert real*, un spaţiu Banach real în care norma este generată de un anumit produs scalar.

Dacă $\mathbf{X}$ este un spaţiu Hilbert faţă de produsul scalar s, se va nota $<x, y>$ în loc de $s(x, y)$.

Putem deci scrie

$$\| x \| = \sqrt{<x, x>}.$$

Inegalitatea lui Cauchy-Schwartz-Buniakovski se scrie în acest caz

$$| <x, y> | \leqslant \| x \| \cdot \| y \|, \quad \text{oricare ar fi } x, y \in \mathbf{X}.$$

Teorema 1. Produsul scalar este o funcţie continuă pe $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Demonstraţie. *Fie* $x_0, y_0 \in \mathbf{X}$ *şi şirurile* $(x_n)_{n \in N}$, $(y_n)_{n \in N}$ *convergente în* norma generată de produsul scalar, către x_0 respectiv y_0.

Putem atunci scrie :

$$| <x_n, y_n> - <x_0, y_0> | = | <x_n - x_0, y_n> + <x_0, y_n - y_0> | \leqslant$$

$$\leqslant | <x_n - x_0, y_n> | + | <x_0, y_n - y_0> | \leqslant \| x_n - x_0 \| \cdot \| y_n \| +$$

$$+ \| x_0 \| \cdot \| y_n - y_0 \|$$

de unde ţinînd seama de mărginirea în normă a şirurilor convergente, rezultă :

$$\lim_{n \to \infty} <x_n, y_n> = <x_0, y_0>$$

§3. FAMILII DE ELEMENTE ORTOGONALE DINTR-UN SPAŢIU HILBERT REAL

Fie ($\mathbf{X}$, $<,>$) un spaţiu hilbertian $\neq \{0\}$.

Definiţia 3. O familie $\{a_i\}_{i\in I}$ de elemente ale spaţiului $\mathbf{X}$ se numeşte ortogonală, dacă şi numai dacă $<a_i, a_j>=0$, oricare ar fi $i, j \in \mathbf{I}$, $i\neq j$.

Dacă în plus $\| a_i \| =1$, oricare ar fi $i \in \mathbf{I}$, se spune că familia $\{a_i\}_{i\in I}$ este *ortonormală*.

Definiţia 4. Familia $\{ a_i\}_{i\in I}$ de elemente din spaţiul $\mathbf{X}$ se numeşte *totală*, dacă şi numai dacă relaţia $<x, a_i>=0$, oricare ar fi $i \in I$, implică $x=0_X$.

Teorema 2. Dacă mulţimea $\mathbf{A}=\{ a_i\}_{i\in I}$ este densă * în $\mathbf{X}$, atunci ea este o mulţime totală în $\mathbf{X}$.

Demonstraţie. Fie $x \in \mathbf{X}$, astfel ca $<x, a_i>=0$, oricare ar fi $i \in \mathbf{I}$. Deoarece $\mathbf{A}$ este densă în $\mathbf{X}$, există $x_n \in \mathbf{A}$, $n \in \mathbf{N}$, $x= \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Cum însă $<x, x_n>=0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, avem şi $<x, \lim\limits_{n\to\infty} x_n>=0 \Leftrightarrow <x, x>=0$. Aceasta atrage $x=0_X$, ceea ce demonstrează afirmaţia teoremei.

Teorema 3. Dacă $\{a_i\}_{i\in I}$ este o familie ortogonală de elemente din spaţiul Hilbert $\mathbf{X}$, $a_i \neq 0_X$, $i \in I$, atunci aceasta formează o mulţime liniar independentă.

Demonstraţie. Dacă

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}\, a_{ik}=0$$

atunci

$$0=< \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} a_{i_k},\ a_{i_j}>= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} <a_{i_k},\ a_{i_j}>=\lambda_{i_j} \cdot \| a_{i_j} \|^2,$$

deci $\lambda_{i_j}=0$, $j \in \overline{1, n}$

Definiţia 5. Dacă $\{a_i\}_{i\in I}$ este o familie ortogonală de elemente $\neq 0^X$ din spaţiul Hilbert real $\mathbf{X}$, atunci numerele reale $c_i(x)= \dfrac{<x, a_i>}{\| a_i \|^2}$, $i \in I$ se numesc *coeficienţii Fourier* ai elementului $x \in \mathbf{X}$ în raport cu familia considerată.

Teorema 4. Dacă $\{a_i\}_{i\in \overline{1,n}}$ este o familie ortogonală de elemente $\neq 0_X$ din spaţiul Hilbert real $\mathbf{X}$, atunci, dintre toate combinaţiile liniare $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i\, a_i$, cea mai mică abatere în normă de la elementul $x \in \mathbf{X}$, o are combinaţia $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, a_i$, unde c_i, $i \in \overline{1, n}$ sînt coeficienţii Fourier ai elementului x în raport cu familia considerată.

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că

$$\inf \left\| x- \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot a_i \right\| = \left\| x- \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \right\|,$$

---

* $\overline{A}=\mathbf{X}$, unde $\overline{A}$ este închiderea lui A în topologia normei lui $\mathbf{X}$.

marginea inferioară luîndu-se în raport cu toate sistemele de numere reale $\{k_i\}_{i\in \overline{1, n}}$.

Scriind expresia normei cu ajutorul produsului scalar, avem :

$$\left\| x-\sum_{i=1}^{n} k_i a_i \right\|^2 = <x-\sum_{i=1}^{n} k_i a_i,\ x-\sum_{i=1}^{n} k_i a_i> = <x, x> - <x,$$

$$\sum_{i=1}^{n} k_i a_i> - <\sum_{i=1}^{n} k_i a_i,\ x> + <\sum_{i=1}^{n} k_i a_i,\ \sum_{i=1}^{n} k_i a_i> = \|x\|^2 -$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} k_i <x, a_i> + \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \|a_i\|^2 = \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} k_i c_i \|a_i\|^2 +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \|a_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (k_i - c_i)^2 \|a_i\|^2 + \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|a_i\|^2 .$$

De aici rezultă că valoarea minimă a acestei expresii o obţinem dacă

$$\sum_{i=1}^{n} (k_i - c_i)^2 \|a_i\|^2 = 0,$$

adică dacă

$$k_i = c_i, \quad i \in \overline{1, n}.$$

Observaţie. Din demonstraţia acestei teoreme, rezultă pentru $k_i = c_i$, $i \in \overline{1, n}$, că

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|a_i\|^2 = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \right\|^2 \geqslant 0,$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|a_i\|^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{2}$$

Această inegalitate ne conduce la următoarele consecinţe :

Consecinţa 1. Dacă $\{a_n\}_{n\in \mathrm{N}}$ este o familie ortogonală de elemente $\neq O_X$, din spaţiul Hilbert real **X**, iar $x \in$ **X**, atunci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|a_n\|^2,$$

unde c_n, $n \in$ N, sînt coeficienţii Fourier ai elementului x în raport cu familia considerată, este convergentă şi are loc *inegalitatea lui Bessel*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|a_n\|^2 \leqslant \|x\|^2 \tag{3}$$

Într-adevăr, folosind inegalitatea (2), putem scrie :

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 \|a_i\|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \|a_i\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

În particular, dacă familia $\{a_n\}_{n\in N}$ este ortonormală, atunci inegalitatea lui Bessel devine

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \leqslant \| x \|^2 \tag{3'}$$

și, prin urmare, seria pătratelor coeficienților Fourier este convergentă.

Consecința 2. Din convergența seriei din stînga inegalității (3) rezultă imediat că

$$\lim_{n\to\infty} c_n \| a_n \| = 0 \tag{4}$$

Dacă familia $\{a_n\}_{n\in N}$ este ortonormală, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$, adică coeficienții Fourier tind către zero cînd $n \to \infty$.

§.4. BAZE ORTOGONALE ÎNTR-UN SPAȚIU HILBERT REAL

Definiția 6. Se numește *bază ortogonală a unui spațiu Hilbert real* **X**, o familie ortogonală și totală ce nu conține originea spațiului.

O familie ortonormală și totală a spațiului **X** se va numi *bază ortonormală*.

În cele ce urmează ne vom mărgini la spații Hilbert în care există o submulțime numărabilă și densă în spațiu (vezi teorema 2). Astfel de spații se numesc *spații Hilbert separabile*.

Observație. Într-un spațiu Hilbert separabil orice sistem ortogonal de elemente este cel mult numărabil.

Într-adevăr, fără a restrînge generalitatea, se poate presupune că sistemul de elemente $\{a_i\}_{i\in I}$ este ortonormal. Atunci

$$\| a_i - a_j \| = \sqrt{2} \text{ pentru orice } i \neq j, \quad i, j \in I.$$

Considerăm acum, mulțimea sferelor $S\left(a_i, \dfrac{1}{2}\right)$, $i \in I$. Aceste sfere sînt disjuncte. Fie acum mulțimea $\{x_n\}_{n\in N}$ peste tot densă în **X**. Atunci fiecare sferă din cele considerate conține cel puțin un element din $\{x_n\}_{n\in N}$. În consecință, mulțimea acestor sfere (și deci, mulțimea elementelor a_i) este cel mult numărabilă.

Teorema 5. Fie $\{a_n\}_{n\in N}$ o familie ortogonală de elemente nenule din spațiul Hilbert real **X**. Condiția necesară și suficientă ca familia $\{a_n\}_{n\in N}$ să fie o bază este ca orice element $x \in \mathbf{X}$ să poată fi reprezentat sub forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \cdot a_n \tag{5}$$

Demonstrație. Necesitatea. Dacă familia $\{a_n\}_{n\in N}$ este o bază ortogonală a spațiului Hilbert real **X**, atunci ea este o familie totală.

Fie atunci $x \in \mathbf{X}$ și

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \cdot a_n,$$

unde $c_n(x)$ sînt coeficienții Fourier ai elementului x în raport cu familia $\{a_n\}_{n\in N}$

Existența lui x_0 se datorește faptului că seria $\sum_{n=1} c_n a_n$ este convergentă pe baza inegalității lui Bessel (3). Atunci, folosind proprietățile produsului scalar, avem :

$$<x-x_0, a_i> = <x, a_i> - <x_0, a_i> = <x, a_i> - <\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n, a_i> =$$

$$= <x, a_i> - <\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j a_j, a_i> = <x, a_i> - \lim_{n\to\infty} <\sum_{j=1}^{n} c_j a_j, a_i> =$$

$$= <x, a_i> - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j <a_j, a_i> = <x, a_i> - \sum_{n=1}^{\infty} c_n <a_n, a_i> =$$

$$= c_i \|a_i\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n <a_n, a_i> = c_i \| a_i \|^2 - c_i <a_i, a_i> = c_i \| a_i \|^2 -$$

$$c_i \|a_i\|^2 = 0, \text{ oricare ar fi } i \in \mathbf{N}.$$

Rezultă că $x - x_0 = O_{\mathbf{X}}$, deci $x = x_0$.

Așadar

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \cdot a_n,$$

care este o reprezentare de forma (5) și necesitatea este demonstrată.

Suficiența. Dacă $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este o familie ortogonală de elemente nenule ale spațiului Hilbert real $\mathbf{X}$ și are loc (5), atunci fie $x \in \mathbf{X}$, astfel ca

$$<x, a_n> = 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N}.$$

Aceasta este echivalent cu

$$<\sum_{i=1}^{\infty} k_i a_i, a_n> = 0, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{N}$$

De aici rezultă $k_n = 0$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$ și deci $x = O_{\mathbf{X}}$. Cu definiția 3.4. familia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ este totală și deci este o bază a spațiului Hilbert real $\mathbf{X}$.

Observație. Reprezentarea (5), dacă există, ea este unică și $k_n = c_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$. Într-adevăr,

$$c_n = \frac{<x, a_n>}{\| a_n \|^2} = \frac{1}{\|a_n\|^2} <\sum_{i=1}^{\infty} k_i a_i, a_n> = \frac{1}{\|a_n\|^2} \cdot k_n \|a_n\|^2 = k_n$$

Prin urmare, seria Fourier a unui element x, relativă la o familie ortogonală și totală $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$, $a_n \neq O_{\mathbf{X}}$, $n \in \mathbf{N}$, are ca sumă elementul respectiv.

Teorema 6. Fie $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ o familie ortogonală de elemente nenule ale spațiului Hilbert real $\mathbf{X}$. Pentru ca familia $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ să fie o bază ortogonală a lui $\mathbf{X}$, este necesar și suficient ca oricare ar fi $x \in \mathbf{X}$, să avem

$$\| x \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \| a_n \|^2 \qquad (6)$$

Demonstrație. Necesitatea. Dacă familia $\{a_n\}_{n\in N}$ este o bază ortogonală a spațiului Hilbert **X**, atunci conform teoremei și observației precedente, avem

$$x=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)\cdot a_n.$$

Putem deci scrie

$$\| x \|^2=<x, x>=<\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n>=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 <a_n, a_n>=\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \| a_n \|^2.$$

Suficiența. Fie pentru suma parțială de rang n a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \| a_n \|^2$, egalitatea

$$\| x \|^2-\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \| a_i \|^2=\left\| x-\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \right\|^2, \tag{7}$$

adevărată pe baza observației la teorema 3.4.

Dacă egalitatea (6) are loc, atunci prin trecere la limită în (7), deducem

$$0=\|x\|^2-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \| a_i \|^2=\| x-\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \|^2=\left\| x-\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i \right\|^2,$$

ceea ce implică

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i.$$

Folosind teorema precedentă, rezultă că familia $\{a_n\}_{n\in N}$ este o bază ortogonală a spațiului Hilbert real **X**.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Egalitatea (6) din teorema precedentă se numește *ecuația de închidere* a familiei $\{a_n\}_{n\in N}$ sau condiția de completitudine a lui Parseval.

§5. SPAȚIUL $L^2_{\mathbf{R}}$ (D). SERII TRIGONOMETRICE.

Fie **D** un domeniu compact și măsurabil Jordan din **R** sau $\mathbf{R}^2$.

Să notăm cu $\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{D})$ — familia tuturor funcțiilor reale definite pe **D** și de pătrat integrabil.

În această mulțime introducem relația de echivalență „$\sim$“ definită astfel:

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1(x)=f_2(x) \quad \text{a·p·t*}$$

Mulțimea cît $\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{D})/\sim$ o vom nota cu $L^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{D})$, iar elementele ei, pentru a nu complica scrierea, le vom nota cu aceleași simboluri ca și ale lui $\mathscr{L}^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{D})$.

Mulțimea $L^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{D})$, cu operațiile de adunare a funcțiilor și înmulțire cu scalari reali, devine un spațiu vectorial real. Fie acum funcția:

$$<.>: L^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{D})\times L^2_{\mathbf{R}}(\mathbf{D})\to \mathbf{R}_+$$

---

* $f_1(x)=f_2(x)$ a·p·t (aproape peste tot) $\Leftrightarrow$ măsura Jordan a mulțimii $M=\{x\in \mathbf{D} \mid f_1(x)\neq f_2(x)\}$ este nulă.

definită de egalitatea:

$$<f, g> = \int_{(D)} f(x) \cdot g(x) \, d\nu \tag{8}$$

Această funcție este un produs scalar pe $L^2_R(D)$, față de care acesta devine un spațiu Hilbert real.

Într-adevăr, folosind proprietățile integralei, avem:

S_1. $<\alpha f_1 + \beta f_2, g> = \int_{(D)} (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) g(x) \, d\nu =$

$$= \alpha \int_{(D)} f_1(x) g(x) \, d\nu + \beta \int_{(D)} f_2(x) g(x) \, d\nu = \alpha <f_1, g> + \beta <f_2, g>$$

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall f_1, f_2, g \in L^2_R(D)$$

S_2. $<f, g> = \int_{(D)} f(x) g(x) \, d\nu = \int_{(D)} g(x) f(x) \, d\nu = <g, f>$

oricare ar fi $f, g \in L^2_R(D)$

S_3. $<f, f> = \int_{(D)} f(x) f(x) \, d\nu = \int_{(D)} f^2(x) \, d\nu > 0,$

oricare ar fi $f \in L^2_R(D)$, $f \neq 0$

elementul nul fiind o funcție egală cu zero „aproape peste tot" în D).

Inegalitatea lui Schwartz-Cauchy-Buniakovski se va scrie atunci sub forma

$$\left(\int_{(D)} f(x) g(x) \, d\nu \right)^2 \leqslant \left(\int_{(D)} f^2(x) \, d\nu \right) \left(\int_{(D)} g^2(x) \, d\nu \right),$$

și pentru $g(x) \equiv 1$, oricare ar fi $x \in D$, ne conduce la următoarea inegalitate:

$$\left(\int_{(D)} f(x) \, d\nu \right)^2 \leqslant \nu(D) \int_{(D)} f^2(x) \, d\nu \tag{9}$$

Folosind produsul scalar (8), spațiul $L^2_R(D)$ devine spațiu vectorial normat, punînd

$$\| f \| = \sqrt{\int_{(D)} f^2(x) \, d\nu}, \quad \text{oricare ar fi } f \in L^2_R(D) \tag{10}$$

Să arătăm acum că spațiul $L^2_R(D)$ este complet.

Fie $(f_n)_{n \in N}$ un șir Cauchy din $L^2_R(D)$, adică

oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $m_\varepsilon \in N$: oricare ar fi $p, q \geqslant m_\varepsilon$; $p, q \in N \Rightarrow$

$$\Rightarrow \| f_p - f_q \| < \varepsilon$$

Pe baza relației (9), avem atunci

$$\int_{(D)} | f_p(x) - f_q(x) | \, d\nu \leqslant (\nu(D))^{1/2} \sqrt{\int_{(D)} [f_p(x) - f_q(x)]^2 d\nu} \leqslant \varepsilon \cdot (\nu(D))^{1/2}$$

Luînd $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$, există un şir crescător de indici $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$, astfel ca

$$\| f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}$$

Deducem deci că seria $\sum_{k=1}^{\infty}\| f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|$ este convergentă şi prin urmare şi seria

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(D)}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|\,d\nu$$

este convergentă.

Aceasta atrage că seria

$$\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|$$

converge aproape peste tot pe $\mathbf{D}$.

Cum

$$f_{n_k}=f_{n_1}+\sum_{i=1}^{k-1}[f_{n_{i+1}}-f_{n_i}]$$

şirul $(f_{n_k}(x))_{k\in\mathbf{N}}$ converge aproape peste tot pe $\mathbf{D}$.

Fie $f:\mathbf{D}\to\mathbf{R}$, definită astfel :

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(x), & \text{pentru } x\in\mathbf{C}\subset\mathbf{D}\\ 0, & \text{pentru } x\in\mathbf{D}-\mathbf{C}\end{cases}$$

unde $\mathbf{C}$ este mulţimea de convergenţă a şirului $(f_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$. Evident $\nu(\mathbf{D}-\mathbf{C})=0$.

Fie acum $k_0\in\mathbf{N}$ aşa ca $n_{k_0}>m_\varepsilon$.

Pentru $p>m_\varepsilon$ şi pentru $k>k_0$, avem

$$\int_{(\mathbf{D})}[f_p(x)-f_{n_k}(x)]^2\,d\nu<\varepsilon^2$$

De aici se deduce că $[f_p(x)-f(x)]^2$ este integrabil şi că

$$\int_{(\mathbf{D})}[f_p(x)-f(x)]^2\,d\nu\leqslant\varepsilon^2$$

Funcţiile f_p şi f_p-f fiind de pătrat integrabil pe $\mathbf{D}$, deducem că şi f este de pătrat integrabil pe $\mathbf{D}$, iar ultima inegalitate ne demonstrează că şirul Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ conţine un subşir convergent, ceea ce înseamnă că el este convergent. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

În cele ce urmează vom folosi spaţiul Hilbert real $L^2_{\mathbf{R}}([a, b])$ cu produsul scalar

$$<f, g>=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \tag{10'}$$

şi spaţiul Hilbert real $L^2_{\mathbf{R}}$ (D) (D — domeniu compact şi măsurabil Jordan, din $\mathbf{R}^2$) cu produs scalar

$$<\mathrm{f}, \mathrm{g}> = \iint_{(D)} \mathrm{f}(x, y)\, \mathrm{g}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{10''}$$

Să aplicăm acum unele rezultate obţinute în paragrafele precedente ale acestui capitol, în cazul spaţiului $\mathbf{L}^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$.

În spaţiul $L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$, mulţimea funcţiilor continue este o mulţime densă. De aici rezultă că şi mulţimea polinoamelor este densă.

Într-adevăr, dacă f este o funcţie de pătrat integrabil, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există o funcţie continuă $\mathrm{g} : [-l, l] \to \mathbf{R}$, astfel ca $\| \mathrm{f} - \mathrm{g} \| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Acesta deoarece funcţia f fiind de pătrat integrabil, putem acoperi mulţimea punctelor de discontinuitate cu intervale astfel ca suma integralelor funcţiei f^2 pe aceste intervale să fie mai mică ca $\frac{\varepsilon}{4}$. Fie acum funcţia $\varphi : [-l, l] \to \mathbf{R}$, egală cu f în afara intervalelor de mai sus şi egală cu zero în interiorul lor.

Să acoperim acum punctele de discontinuitate ale funcţiei φ cu intervale a căror lungime totală h să satisfacă condiţia

$$4M^2 h \leqslant \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{unde } M = \sup_{x \in [-l, l]} |\varphi(x)|$$

Vom putea acum alege drept funcţie g, funcţia continuă pe $[-l, l]$ egală cu φ în afara intervalelor de mai sus şi liniară în interiorul fiecăruia dintre ele. Avem atunci

$$\int_{-l}^{l} [\mathrm{f}(x) - \mathrm{g}(x)]^2\, \mathrm{d}x = \int_{-l}^{l} [\mathrm{f}(x) - \varphi(x) + \varphi(x) - \mathrm{g}(x)]^2\, \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-l}^{l} [\mathrm{f}(x) - \varphi(x)]^2\, \mathrm{d}x + 2\int_{-l}^{l} [\varphi(x) - \mathrm{g}(x)]^2\, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

În baza unei cunoscute teoreme a lui Weierstrass, există un polinom P (x) aşa ca

$$|\mathrm{g}(x) - \mathrm{P}(x)| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2l}}.$$

Rezultă atunci

$$\| \mathrm{g} - \mathrm{P} \| = \sqrt{\int_{-l}^{l} |\mathrm{g}(x) - \mathrm{P}(x)|^2\, \mathrm{d}x} < \sqrt{\int_{-l}^{l} \frac{\varepsilon^2}{8l}\, \mathrm{d}x} =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{8l} x \Big|_{-l}^{l}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{8l} \cdot 2l} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

deci

$$\| \mathrm{f} - \mathrm{P} \| \leqslant \| \mathrm{f} - \mathrm{g} \| + \| \mathrm{g} - \mathrm{P} \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Vom arăta acum că mulţimea polinoamelor trigonometrice de forma

$$\sum_{k=0}^{n}\left[a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right].$$

este densă în $L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$.

Într-adevăr, dacă $f\in L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$, atunci pentru orice $\varepsilon>0$, există o funcţie $g:[-l, l]\to\mathbf{R}$, continuă, astfel ca

$$\| f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Funcţia g fiind continuă pe intervalul compact $[-l, l]$, este mărginită pe acest interval. Există deci $M>0$, astfel ca

$$|g(x)|\leqslant M, \text{ oricare ar fi } x\in[-l, l].$$

Fie $0<\varepsilon<8M\sqrt{2l}$ şi $\delta>0$, astfel ca

$$\delta<\left(\frac{\varepsilon}{8M}\right)^2.$$

Să considerăm funcţia continuă $h:[-l, l]\to\mathbf{R}$, definită astfel:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(-l+\delta)-g(l)}{\delta}x+\dfrac{(\delta-l)g(l)+l\,g(-l+\delta)}{\delta} & \text{dacă } x\in[-l,-l+\delta]\\ g(x) & \phantom{\text{dacă }} x\in[-l+\delta, l]\end{cases}$$

Observînd că $h(-l)=g(l)=h(l)$, deducem

$$|h(x)|\leqslant M, \text{ oricare ar fi } x\in[-l, l].$$

Putem atunci scrie

$$\| g-h\|^2=\int_{-l}^{l}[g(x)-h(x)]^2\,dx=\int_{-l}^{-l+\delta}[g(x)-h(x)]^2\,dx\leqslant(2M)^2\delta<\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2,$$

de unde

$$\| f-h\|\leqslant\| f-g\|+\| g-h\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{3\varepsilon}{4}.$$

Pe de altă parte, folosind a doua teoremă de aproximare a lui Weierstrass, există un polinom trigonometric $P(x)$, astfel ca

$$|h(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2l}},$$

de unde rezultă

$$\| h-P\|^2=\int_{-l}^{l}[h(x)-P(x)]^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{16\cdot 2l}\cdot 2l=\frac{\varepsilon^2}{16}$$

Vom avea atunci

$$\| f-P\|\leqslant\| f-h\|+\| h-P\|<\frac{3\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon$$

Am arătat astfel că mulţimea polinoamelor trigonometrice este densă în $L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$.

Fie acum în spaţiul $L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$ familia de funcţii

$$\left\{1, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x\right\}_{n\in\mathbf{N}} \tag{11}$$

Această familie este ortogonală.

Într-adevăr, prin calcul se stabileşte că, folosind pentru produsul scalar formula (10′), avem :

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0, \text{ oricare ar fi } n\in\mathbf{N}$$

$$\int_{l}^{l}\cos\frac{p\pi}{l}x\cos\frac{q\pi}{l}x\,dx=0, \text{ oricare ar fi } p, q\in\mathbf{N}, p\neq q,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{p\pi}{l}x\sin\frac{q\pi}{l}x\,dx=0, \text{ oricare ar fi } p, q\in\mathbf{N}, p\neq q,$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{p\pi}{l}x\cos\frac{q\pi}{l}x\,dx=0, \text{ oricare ar fi } p, q\in\mathbf{N}$$

Familia (11) este şi totală.

Într-adevăr dacă un element $\mathrm{f}\in L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$ este ortogonal familiei(11), atunci el este ortogonal şi oricărui polinom trigonometric şi, cum mulţimea polinoamelor trigonometrice este peste tot densă, rezultă $\mathrm{f}\equiv 0$.

Familia (11), fiind ortogonală şi totală, este o bază a spaţiului Hilbert real $L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$ şi conform teoremei 5. orice element $\mathrm{f}\in L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$ se poate scrie sub forma

$$\mathrm{f}(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{12}$$

unde

$$\frac{a_0}{2}=\frac{<\mathrm{f}(x), 1>}{\|1\|^2}, \quad a_n=\frac{<\mathrm{f}(x), \cos\frac{n\pi}{l}x>}{\left\|\cos\frac{n\pi}{l}x\right\|^2},$$

$$b_n=\frac{<\mathrm{f}(x), \sin\frac{n\pi}{l}x>}{\left\|\sin\frac{n\pi}{l}x\right\|^2}, \text{ oricare ar fi } n\in\mathbf{N}$$

Ţinînd seama de expresia produsului scalar (10′), avem

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{f}(x)\,dx; \quad a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{f}(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\mathrm{f}(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx; \quad \text{oricare ar fi } n\in\mathbf{N} \tag{13}$$

Seria (12), în care a_0, a_n, b_n ; $n \in \mathbf{N}$ sînt calculaţi cu formulele (13), se numeşte *seria Fourier trigonometrică* a funcţiei f pe intervalul $[-l, l]$. Convergenţa seriei se înţelege în sensul normei spaţiului $L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$, adică dacă

$$s_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right),$$

avem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\int_{-l}^{l}[f(x)-s_n(x)]^2\,dx}=0.$$

Datorită acestei expresii, se mai spune că convergenţa seriei (12) este în medie pătratică.

Evident, sistemul (11) fiind o bază ortogonală a spaţiului Hilbert real $L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$, conform teoremei 6., este verificată ecuaţia de închidere (6), care se traduce prin egalitatea :

$$\int_{-l}^{l}f^2(x)\,dx=\frac{l}{2}a_0^2+l\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2). \tag{14}$$

Consecinţa 2 din paragraful 3 ne conduce la

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0,$$

sau şi mai general

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0$$

pentru orice $[a, b]\subset[-l, l]$.

Într-adevăr, fie

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\in[a, b]\\ 0, & x\in[-l, a)\cup(b, l]\end{cases}$$

Funcţia g este evident cu pătrat integrabil pe $[-l, l]$ şi conform formulei (4), avem :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}g(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0$$

Pe de altă parte, din definiţia funcţiei g rezultă că

$$\int_{-l}^{l}g(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

şi

$$\int_{-l}^{l}g(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,$$

de unde deducem

$$\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)\cos\frac{n\pi_x}{l}\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=0$$

Fie acum $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, periodică de perioadă $2l$ și de pătrat integrabil pe $[-l, l]$. Atunci seria Fourier atașată funcției f, este tot de forma (12), coeficienții putînd fi calculați și cu formule:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_a^{a+2l} f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\,dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_a^{a+2l} f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx \end{cases} \tag{15}$$

deoarece pentru funcții periodice de perioadă $2l$, intervalul de integrare $[-l, l]$ poate fi înlocuit prin orice alt interval de lungimea $2l$.

Pentru astfel de funcții, putem atunci scrie:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = 0,$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbf{R}$.

Observăm din cele de mai sus că unei funcții date i se poate atașa o serie trigonometrică atunci cînd se pot determina coeficienții săi Fourier.

Desigur, în acest caz se pune întrebarea: seria trigonometrică atașată funcției $f: [-l, l] \to \mathbf{R}$ este convergentă? Dacă da, atunci ce legătură există între suma acestei serii și funcția f?

Deoarece în multe probleme de tehnică sînt necesare dezvoltări în serii Fourier a funcțiilor monotone pe porțiuni, respectiv continue pe porțiuni, dăm în încheierea acestui paragraf noțiunile necesare și criterii de convergență a unor astfel de serii.

Definiția 7. Funcția $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ se numește monotonă pe porțiuni pe intervalul $[a, b]$, dacă și numai dacă ea este continuă în punctele acestui interval cu excepția eventual a unui număr finit de puncte în care însă are limite laterale finite, și intervalul $[a, b]$ poate fi descompus într-un număr finit de subintervale pe care f să fie monotonă.

Definiția 8. Funcția $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ se numește continuă pe porțiuni pe intervalul $[a, b]$, dacă și numai dacă ea este continuă în punctele acestui interval cu excepția eventual a unui număr finit de puncte în care însă are limite laterale finite.

Teorema 7. (Dirichlet). Dacă funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, periodică de perioadă $2l$, este monotonă pe porțiuni pe intervalul $[-l, l]$, atunci seria trigonometrică atașată funcției f converge în fiecare punct $x \in \mathbf{R}$ către media aritmetică a limitelor laterale ale funcției f în punctul x, adică

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{16}$$

De asemenea, seria Fourier a funcției f converge uniform pe orice interval $[a, b] \subset \mathbf{R}$ pe care funcție este continuă.

Teorema 8. Dacă funcția $f: [-l, l] \to \mathbf{R}$ și derivata sa f' sînt continue pe porțiuni, atunci seria trigonometrică atașată funcției f converge în fiecare punct $x \in [-l, l]$ către media aritmetică a limitelor laterale ale funcției f în punctul x și converge uniform pe orice interval $[a, b] \subset [-l, l]$ pe care f este continuă.

Evident, dacă $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este periodică de perioadă $2l$ și satisface pe intervalul $[-l, l]$ condițiile din teorema 8, atunci seria trigonometrică atașată funcției f este convergentă și are loc formula (16) pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Subliniem faptul că ipotezele celor două teoreme, în general vorbind, nu sînt echivalente. Astfel există funcții care satisfac condițiile teoremei 7 dar, nu satisfac condițiile teoremei 8, și reciproc.

Exemplu, funcția f definită pe intervalul $[-\pi, \pi]$ prin

$$f(x)=\begin{cases} x^4 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{pentru } x \neq 0 \\ 0 & , \text{pentru } x=0 \end{cases}$$

și îndeplinind condiția $f(x+2\pi)=f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, satisface condițiile teoremei 8 și nu satisface condițiile teoremei 7. Pe de altă parte există funcții continue și monotone pe porțiuni pe intervalul $[-\pi, \pi]$, care nu au derivată într-o infinitate de puncte ale intervalului $[-\pi, \pi]$, adică nu satisfac condițiile teoremei 8, dar satisfac condițiile teoremei 7, dacă bineînțeles $f(x+2\pi)=f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$.

Aplicație. Să se dezvolte în serie Fourier funcția f de perioadă 2π, definită pe intervalul $(-\pi, \pi)$, prin :

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0 \leqslant x < \pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Rezolvare. f are reprezentarea grafică din figura 1.

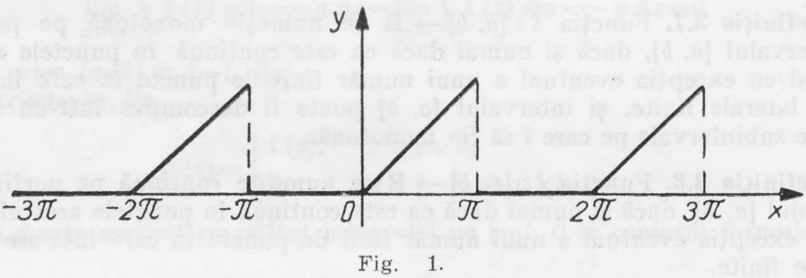

Fig. 1.

Condițiile lui Dirichlet sînt îndeplinite, dacă în punctele de discontinuitate, $x=(2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, atribuim funcției f valoarea

$$f((2k+1)\pi)=\frac{\pi}{2}.$$

Atunci seria Fourier a funcției f converge pentru orice $x \in \mathbf{R}$ și putem scrie :

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Coeficienții a_0, a_n, b_n $(n \in \mathbf{N})$ sînt dați de formulele (13)

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}=$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{pentru } n\text{-par} \\ -\dfrac{2}{n^2\pi}, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\, dx=\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

În consecință, dezvoltarea cerută este

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\left(-\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x\right)-\frac{\sin 2x}{2}+$$

$$+\left(-\frac{2}{9\pi}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)-\frac{\sin 4x}{4}+$$

$$+\left(-\frac{2}{25\pi}\cos 5x+\frac{1}{5}\sin 5x\right)+\ldots$$

Pentru $x=0$, obținem

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots\right),$$

de unde

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

Observăm din acest exemplu că, folosind dezvoltarea în serie Fourier a unor funcții, putem afla sumele anumitor serii numerice convergente.

Întrucît în multe probleme de tehnică modelarea matematică a fenomenelor conduce la ecuații diferențiale a căror soluționare este legată de folosirea seriilor trigonometrice și a operațiilor de derivare a acestora ; vom încheia acest paragraf cu prezentarea condițiilor în care converg derivatele seriilor trigonometrice ale unei funcții date.

Fie f o funcție continuă de perioadă $2l$, admițînd derivate pînă la ordinul p, din care primele $p-1$, continue, iar a $p-a$ absolut integrabilă. Atunci au loc următoarele :

1) seriile trigonometrice ale celor p derivate pot fi obținute prin derivarea termen cu termen a seriei trigonometrice a funcției f și toate aceste serii, în afară eventual de ultima, converg către derivatele corespunzătoare.

2) pentru coeficienții Fourier ai funcției f au loc relațiile

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n=\lim_{n\to\infty} n^p b_n=0$$

Pentru a demonstra prima afirmație vom observa că pentru coeficienții Fourier ai lui f′, avem :

$$a_0'=0,\quad a_n'=\frac{n\pi}{l}b_n \quad \text{și} \quad b_n'=-\frac{n\pi}{l}a_n$$

Aceasta ne dovedește că seria trigonometrică a lui f' (x) va fi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{l}\left(b_n \cos\frac{n\pi}{l} x - a_n \sin\frac{n\pi}{l} x\right)$$

adică seria obținută prin derivarea termen cu termen a seriei Fourier a funcției f.

În mod analog se demonstrează afirmația 1) pentru derivatele pînă la ordinul p ale lui f.

Convergența tuturor seriilor obținute prin derivări termen cu termen, în afară eventual de ultima, către derivatele corespunzătoare, rezultă din derivabilitatea acestor serii (pînă la ordinul $p-1$ inclusiv).

Cea de-a doua afirmație se verifică imediat dacă ținem seama de faptul că $f^{(p)}$ este absolut integrabilă și deci coeficienții săi Fourier converg la zero cînd $n \to \infty$.

Plecînd acum de la o serie trigonometrică

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l} x + b_n \sin\frac{n\pi}{l} x\right)$$

se poate demonstra că dacă coeficienții a_n și b_n satisfac relațiile:

$$|n^p a_n| \leqslant M, \quad |n^p b_n| \leqslant M \quad (p \geqslant 2, \ M = \text{constant})$$

atunci suma seriei date este o funcție continuă de perioadă $2l$, admițînd $p-2$ derivate continue care pot fi obținute prin derivarea termen cu termen a seriei.

§ 6. SERII FOURIER ALE FUNCȚIILOR PARE ȘI IMPARE

Teorema 9. Dacă $f: [-l, l] \to R$ este o funcție pară, atunci seria trigonometrică atașată are coeficienții:

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x) \cos\frac{n\pi}{l} x \, dx & n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \\ b_n = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Demonstrație. Într-adevăr, conform formulelor (13), avem:

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos\frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x) \cos\frac{n\pi}{l} x \, dx +$$

$$+ \frac{1}{l}\int_0^l f(x) \cos\frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \cos\frac{n\pi}{l} x \, dx \qquad n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

Aceasta deoarece f și cosinus sînt funcții pare pe intervalul $[-l, l]$. Procedînd analog pentru calculul coeficienților b_n și ținînd seama că

$$\sin\left(-\frac{n\pi}{l} t\right) = -\sin\frac{n\pi}{l} t, \qquad \text{oricare ar fi} \quad t \in [-l, l]$$

Obținem:

$$b_n = -\frac{1}{l}\int_0^l f(t) \sin\frac{n\pi}{l} t \, dt + \frac{1}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi}{l} x \, dx = 0,$$

$$\text{oricare ar fi } n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

Teorema 10. Dacă $f : [-l, l] \to \mathbf{R}$ este o funcție impară, atunci seria trigonometrică atașată are coeficienții

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx \end{cases} \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\} \tag{18}$$

Într-adevăr, procedînd prin calcul direct pe baza formulelor (13) și ținînd cont că f este impară, adică $f(-t) = -f(t)$, oricare ar fi $t \in [-l, l]$, obținem formulele (18).

Observație. Formulele (17) și (18) ne simplifică mult volumul de calcul al coeficienților Fourier în cazul cînd funcția f este pară sau impară. Seria Fourier a unei astfel de funcții conține în dezvoltarea sa numai cosinusuri sau numai sinusuri.

Dacă funcția $f : [0, l] \to \mathbf{R}$ este de patrat integrabil sau satisface condițiile din teoremele 7 sau 8, atunci se poate pune problema de a dezvolta această funcție în serie de cosinusuri sau în serie de sinusuri.

Acest lucru este posibil, prelungind mai întîi funcția de pe intervalul $[0, l]$ pe intervalul $[-l, 0]$ prin paritate, respectiv prin imparitate, iar apoi pentru noua funcție obținută să facem dezvoltarea în serie Fourier, folosind pentru calculul coeficienților Fourier formulele (17) respectiv (18). Cum însă în formulele (17) și (18) vor figura numai valorile funcției f date pe segmentul $[0, l]$, în aplicațiile practice prelungirile respective nu se vor mai face efectiv.

Exemplu. Să se dezvolte în serie Fourier de cosinusuri funcția f definită pe intervalul $[0, \pi]$ prin $f(x) = x$.

Rezolvare: Vom prelungi funcția pe $[-\pi, 0]$ prin paritate iar apoi prin periodicitate pe toată axa Ox ca în figura 2.

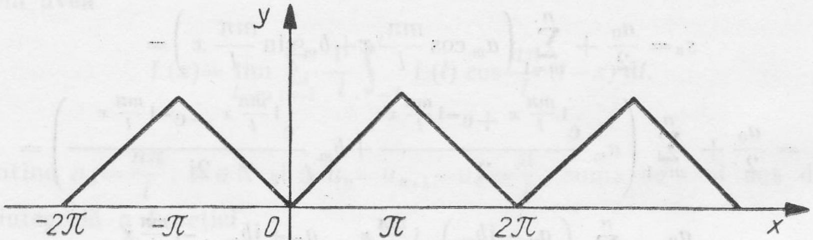

Fig. 2.

Notăm funcția periodică din figura 2. cu g.

Funcția g satisface condițiile teoremei lui Dirichlet și va avea, în consecință, dezvoltarea:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Coeficienții a_0 și a_n ($n \in \mathbf{N}$) vor fi dați de formulele (17). Avem așadar

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1] = \begin{cases} 0, & \text{pentru } n\text{-par} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi}, & \text{pentru } n \text{ impar} \end{cases}$$

şi deci

$$g(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

Pe intervalul $[0, \pi]$ funcţia g coincide cu f şi prin urmare, putem scrie:

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}, \qquad x\in[0, \pi]$$

§ 7. FORMA COMPLEXĂ A UNEI SERII TRIGONOMETRICE

Fie $f\in L^2_{\mathbf{R}}([-l, l])$ şi seria ei trigonometrică

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

unde a_0, a_n, b_n $(n\in\mathbf{N})$ sînt coeficienţii Fourier daţi de formulele (13).

Suma parţială de rang n a acestei serii se va putea scrie sub o formă mai condensată, dacă folosim formulele

$$\cos\alpha=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}, \quad \sin\alpha=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}, \tag{19}$$

deduse din identitatea lui Euler,

$$e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha.$$

Într-adevăr,

$$s_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}\left(a_m\cos\frac{m\pi}{l}x+b_m\sin\frac{m\pi}{l}x\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}\left(a_m\frac{e^{i\frac{m\pi}{l}x}+e^{-i\frac{m\pi}{l}x}}{2}+b_m\frac{e^{i\frac{m\pi}{l}x}-e^{-i\frac{m\pi}{l}x}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{a_m-ib_m}{2}\right)e^{i\frac{m\pi}{l}x}+\frac{a_m+ib_m}{2}e^{-i\frac{m\pi}{l}x}.$$

Notînd

$$c_0=\frac{a_0}{2}, \quad c_m=\frac{a_m-ib_m}{2}, \quad c_{-m}=\frac{a_m+ib_m}{2}; \quad m\in\mathbf{N}, \tag{20}$$

atunci suma parţială de rang n a seriei Fourier considerate, va fi

$$s_n=\sum_{m=-n}^{n}c_m e^{i\frac{m\pi}{l}x} \tag{21}$$

Cu aceasta, $f(x)$ se poate scrie sub forma

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{n\pi}{l}x}, \tag{22}$$

care poartă numele de *forma complexă a seriei trigonometrice a lui* $f(x)$.

Coeficienţii c_n daţi de formulele (20) se numesc *coeficienţii Fourier complecşi ai funcţiei* f.

Exprimînd coeficienţii Fourier reali ai funcţiei f, după formulele (13), obţinem pentru coeficienţii Fourier complecşi formulele:

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(x) e^{-i \frac{n\pi}{l} x} dx, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbf{Z}. \tag{23}$$

Observaţie. Coeficienţii c_n şi c_{-n}, $(n \in \mathrm{N})$ sînt numere complex conjugate Aceasta rezultă imediat din (20).

§ 8. INTEGRALA FOURIER

Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de pătrat integrabil pe orice interval compact $[-l, l]$. Atunci, pe un astfel de interval, f poate fi dezvoltată în serie trigonometrică şi avem:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \right),$$

unde a_0, a_n şi b_n sînt coeficienţii Fourier daţi de formulele (13). Înlocuind expresiile coeficienţilor în seria trigonometrică, putem scrie

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi}{l} (t-x)\, dt$$

Dacă presupunem acum că $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ există, atunci, considerînd pe x fix, vom avea

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{n\pi}{l} (t-x)\, dt. \tag{24}$$

Notînd $u_n = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathrm{N}$ şi $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}$, suma de mai sus devine suma integrală a funcţiei

$$g(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u (t-x)\, dt,$$

formată pentru intervalul $[0, +\infty)$.

Prin urmare, limita din membrul doi al formulei (24), devine

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u (t-x)\, dt,$$

ceea ce ne conduce la formula

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u (t-x)\, dt. \tag{25}$$

Această formulă se numeşte *formula integrală a lui Fourier*, iar integrala din membrul doi se numeşte integrala Fourier.

Se demonstrează că: dacă funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ și derivata f' sînt continue pe porțiuni pe orice segment finit, iar f este absolut integrabilă pe toată axa Ox, atunci formula integrală a lui Fourier are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

În formula integrală a lui Fourier, integrala interioară este o funcție pară de u, ceea ce permite scrierea formulei sub forma:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x)\, dt \tag{26}$$

Pe de altă parte,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt$$

este o funcție impară de u și deci

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin u(t-x)\, dt = 0$$

Putem atunci scrie

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iu(t-x)}\, dt \tag{27}$$

Această egalitate se numește *formula complexă a lui Fourier.*

Analog ca și la serii Fourier ne punem problema, ce devine integrala Fourier în cazul funcțiilor pare sau impare.

Dezvoltînd în formula (25) $\cos u(t-x)$, se obține

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\cos ut \cos ux + \sin ut \sin ux)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos ux\, du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut\, dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin ux\, du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut\, dt$$

De aici deducem că dacă f este o funcție pară, formula integrală a lui Fourier se reduce la

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \cos ux\, du \int_{0}^{\infty} f(t) \cos ut\, dt, \tag{28}$$

iar dacă f este o funcție impară, atunci

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \sin ux\, du \int_{0}^{\infty} f(t) \sin ut\, dt \tag{29}$$

§ 9. TRANSFORMATA FOURIER

Formula integrală a lui Fourier poate fi reprezentată sub forma a două egalităţi.

Notînd

$$g(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-iut}\, dt \tag{30}$$

atunci

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{iux}\, du \tag{31}$$

Remarcăm că formula (27) are sens pentru toate funcţiile absolut integrabile f. Ea defineşte o aplicaţie numită *transformata Fourier*, care face să corespundă fiecărei funcţii $f \in L^1_{\mathrm{R}}(-\infty, +\infty)$ o funcţie bine determinată g definită pe toată axa reală.

Formula (31) care exprimă funcţia f prin transformata sa Fourier se numeşte *formula de inversare a transformatei Fourier.*

Pentru a obţine o exprimare mai simetrică a celor două formule, se obişnuieşte a defini funcţia g prin formula :

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-iux}\, dx \tag{30'}$$

Atunci formula de inversare se va scrie

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\, e^{iux}\, du \tag{31'}$$

Funcţiile g şi f definite ca mai sus se numesc una transformata Fourier a celeilalte.

În ipoteza că funcţia f este o funcţie pară, din (28), obţinem formulele analoage

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos ux\, dx \tag{32}$$

şi

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} g(u)\cos ux\, du \tag{33}$$

Funcţiile g şi f se numesc în acest caz una transformata Fourier prin cosinus a celeilalte.

În ipoteza că f este o funcţie impară, din (29), obţinem :

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin ux\, dx \tag{34}$$

şi

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} g(u)\sin ux\, du \tag{35}$$

Funcţiile g şi f se numesc în acest caz una transformata Fourier prin sinus a celeilalte.

Observație. În formulele (30') (31') (32), (33), (34) și (35), dacă se consideră că funcțiile ce figurează sub semnul de integrală sînt necunoscute, atunci aceste formule pot fi privite ca niște ecuații numite *ecuații integrale de tip Fourier*.

Soluțiile acestor ecuații sînt date de formulele de reciprocitate corespunzătoare. Astfel soluția ecuației (30') este dată de formula (31') și reciproc. Analog se întîmplă cu egalitățile (32) și (33) respectiv (34) și (35).

Exemplu. Să se rezolve ecuația integrală

$$\int_0^\infty g(u)\cos ux\, du = h(x), \text{ unde } h(x)=\begin{cases} x, & \text{pentru } 0<x\leqslant 1 \\ 0, & \text{pentru } x>1 \end{cases}$$

Putem scrie ecuația dată sub forma

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(u)\cos ux\, du = f(x) \text{ cu } f(x)=\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,x, & \text{pentru } 0<x\leqslant 1 \\ 0, & \text{pentru } x>1 \end{cases}$$

Observăm că în acest caz ecuația este de forma (33) și prin urmare soluția este dată de formula (32).

Avem deci

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos ux\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 x\cos ux\, dx =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{u}\sin u+\frac{1}{u^2}\cos u-\frac{1}{u^2}\right)$$